الجمهورية الجزائرية الديمقراطية الشعبية

وزارة التربية الوطنية — مديرية التربية لولاية باتنة

امتحان البكالوريا التجريبي — دورة: ماي 2022

شعبة: العلوم التجريبية — ثانوية عياش مقلاتي الحاسي

اختبار في مادة: الرياضيات — المدة: 03 سا و 30 د

على المترشح أن يختار أحد الموضوعين الآتيين:

الموضـــــــــــــوع الأول

التمرين الأول: 04 نقاط

نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ كما يلي: $\begin{cases} u_1 = \ln(2) \\ u_{n+1} = \ln\left(2 - e^{-u_n}\right) \end{cases}$.

1. أ) تحقق أن: $u_2 = \ln\left(\dfrac{3}{2}\right)$ و $u_3 = \ln\left(\dfrac{4}{3}\right)$.

   ب) برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي غير معدوم n: $u_n > 0$.

2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $2 - e^{-u_n} - e^{u_n} = -e^{u_n}\left(e^{u_n} - 1\right)^2$ ثم استنتج أن: $2 - e^{-u_n} < e^{u_n}$.

   ب) بين أن المتتالية (u_n) متناقصة تماما، ثم استنتج أنها متقاربة.

3. برهن بالتراجع من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $u_n = \ln\left(\dfrac{n+1}{n}\right)$، ثم احسب $\lim\limits_{n \to +\infty} u_n$.

4. نعتبر الجداء P بحيث: $P = e^{u_1} \times e^{u_2} \times \ldots\ldots \times e^{u_{2021}}$.

   ✓ بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}^*$: $P = 2022$

التمرين الثاني: 04 نقاط

أجب بصحيح أو خطأ مع التبرير في كل حالة من الحالات التالية:

1. نعتبر الدالة u المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $u(x) = 1443 - 2022x$.

   ✓ الدالة $x \mapsto e^{u(x)}$ متناقصة تماما على $\mathbb{R}$.

2. نعتبر الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x) = 2x\ln(x)$.

   ✓ الدالة الأصلية للدالة h والتي تنعدم عند العدد 1 هي الدالة H المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $H(x) = x^2\ln(x)$.

3. المتتالية العددية (w_n) المعرفة على $\mathbb{N}^*$ بـ: $w_n = \dfrac{\ln(n)}{e^n}$ متقاربة.

4. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R} - \{-1;1\}$ بـ: $g(x) = x - \ln\left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)$.

   ✓ الدالة g زوجية.

التمرين الثالث: 05 نقاط

يحتوي كيس على سبع كريات لا نفرق بينها عند اللمس منها أربع كريات بيضاء و ثلاث كريات خضراء.

I. نسحب عشوائيا و في آن واحد ثلاث كريات من الكيس.

1. احسب احتمال كل من الحادثتين A و B بحيث A: عدد الكريات البيضاء المسحوبة أكبر من عدد الكريات الخضراء المسحوبة و B: الحصول على كريتين بالضبط من نفس اللون.
2. احسب $P\left(A\cap B\right)$ ثم استنتج كلا من $P_A\left(B\right)$ و $P\left(A\cup B\right)$.

II. نسحب الآن ثلاث كريات على التوالي دون إرجاع و ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات البيضاء المتبقية.

1. عرف قانون احتمال للمتغير العشوائي X.
2. احسب الأمل الرياضياتي $E\left(X\right)$ للمتغير العشوائي X، ثم استنتج $E\left(1743X-1962\right)$.

التمرين الرابع: 07 نقاط

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $\mathbb{R}$ بالعبارة: $g\left(x\right)=2e^{x-1}-x-1$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. أ) بين أن المعادلة $g\left(x\right)=0$ تقبل حلين أحدهما العدد 1 والآخر α بحيث $-0{,}6<\alpha<-0{,}5$.

ب) استنتج حسب قيم x إشارة $g\left(x\right)$.

II. الدالة f معرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $f\left(x\right)=2x-2+\left(x+2\right)e^{1-x}$ و $\left(C_f\right)$ تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $\left(O;\vec{i},\vec{j}\right)$.

1. أ) بين أن $\lim\limits_{x\to+\infty}f\left(x\right)=+\infty$ ثم احسب $\lim\limits_{x\to-\infty}f\left(x\right)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f'\left(x\right)=e^{1-x}g\left(x\right)$ ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) بين أنه من أجل $x\in\mathbb{R}$: $f''\left(x\right)=xe^{1-x}$، ثم استنتج أن $\left(C_f\right)$ يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها.

2. بين أن $f\left(\alpha\right)=2\alpha+\dfrac{2}{\alpha+1}$، ثم اعط حصرا لـ $f\left(\alpha\right)$.
3. أ) بين أن المستقيم $\left(\Delta\right)$ ذا المعادلة $y=2x-2$ مقارب مائل لـ $\left(C_f\right)$ عند $+\infty$، ثم ادرس الوضع النسبي لـ $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$.

ب) بين أن $\left(C_f\right)$ يقبل مماسا $\left(T\right)$ موازيا لـ $\left(\Delta\right)$ يطلب كتابة معادلة له.

4. أ) أنشئ كلا من $\left(\Delta\right)$، $\left(T\right)$ ثم مثل $\left(C_f\right)$. نقبل أن $f\left(\beta\right)=0$ بحيث $-1{,}63<\beta<-1{,}61$، يعطى $f\left(\alpha\right)\approx3{,}73$.

ب) عين بيانيا قيم الوسيط الحقيقي m التي من أجلها تقبل المعادلة $f\left(x\right)=2\left(x-1\right)+m$ حلين مختلفين في الإشارة.

5. أ) بين أن الدالة H المعرفة على $\mathbb{R}$ بـ: $H\left(x\right)=\left(-x-3\right)e^{1-x}$ دالة أصلية للدالة $x\mapsto\left(x+2\right)e^{1-x}$ على $\mathbb{R}$.

ب) استنتج A مساحة الحيز المحدد بـ: $\left(C_f\right)$ و $\left(\Delta\right)$ بين العددين -2 و 1.

انتهـــــــــــى الموضوع الأول

الموضـــــوع الثانـــــــي

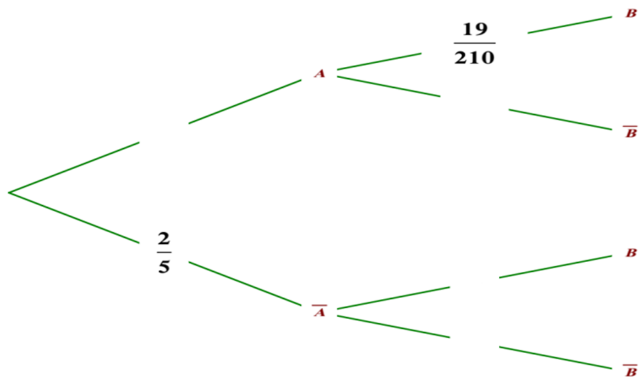
التمرين الأول: 5 نقاط

يحتوي وعاء U على 10 كريات منها خمس كريات حمراء مرقمة بـ: -2، -1، 0، 1، 2 و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: -1، 0، 1 و كريتين سوداوين مرقمتين بـ: -1، 1 و يحتوي وعاء V على 9 كريات موزعة كما يلي: خمس كريات حمراء مرقمة بـ: $2,2,2,1,1$ و ثلاث كريات خضراء مرقمة بـ: $-3,2,3$ و كرية سوداء مرقمة بـ: -1، و يحتوي وعاء W على خمس كريات منها ثلاث كريات بيضاء و كريتين صفراوين.

نسحب عشوائيا و في آن واحد أربع كريات من أحد الوعاءين U أو V بالكيفية التالية:

نقوم بسحب كرية واحدة عشوائيا من الوعاء W، إذا تحصلنا على كرية بيضاء نسحب الكريات الأربعة من U و إذا تحصلنا على كرية صفراء نسحب الكريات الأربعة من V.

نسمي A الحدث: الحصول على كرية بيضاء، و نسمي B الحدث الحصول على أربع كريات مجموع أرقامها معدوم.



1. انقل شجرة الاحتمالات المقابلة ثم أكملها موضحا طريقة الحساب.
2. استنتج $P(B)$ ثم احسب $P_{\overline{B}}(A)$.
3. ليكن X المتغير العشوائي الذي يرفق بكل نتيجة عملية سحب عدد الكريات السوداء المسحوبة .
   - عرف قانون الاحتمال للمتغير العشوائي X ثم أحسب أمله الرياضياتي $E(X)$.

التمرين الثاني: 04 نقاط

I. نعتبر المتتالية العددية (u_n) المعرفة بحدها الأول: $u_0 = e^{-1}$ و من أجل كل عدد طبيعي n: $u_{n+1} = u_n\sqrt{u_n}$.

1. برهن بالتراجع أنه من أجل كل عدد طبيعي n: $0 < u_n < 1$.
2. أ) بين أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $\frac{u_{n+1}}{u_n} < 1$، ثم استنتج اتجاه تغير المتتالية (u_n).
   ب) استنتج أن المتتالية (u_n) متقاربة، ثم احسب $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n$.

II. نعتبر المتتالية العددية (v_n) المعرفة من أجل كل عدد طبيعي بـ: $v_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n \ln(u_n)$.

1. بين أن (v_n) متتالية هندسية أساسها $\frac{1}{2}$ يطلب حساب حدها الأول.
2. اكتب v_n بدلالة n ثم استنتج أنه من أجل $n \in \mathbb{N}$: $u_n = e^{-\left(\frac{3}{2}\right)^n}$
3. احسب بدلالة n المجموع S_n بحيث $S_n = \ln(u_0) + \ln(u_1) + ... + \ln(u_n)$.

التمرين الثالث: 04 نقاط

نعتبر الدالتين f و g المعرفتين على المجال $D = [0;\ln 2]$ بـ: $f(x) = \frac{e^{2x}}{e^x+1}$، $g(x) = \frac{1}{e^x+1}$، و ليكن

(C_f) و (C_g) تمثيليهما البيانيين على الترتيب في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(o;\vec{i},\vec{j})$.

نضع $I=\int_0^{\ln 2} f(x)dx$ و $J=\int_0^{\ln 2} g(x)dx$.

1. بين أنه من أجل $x\in D$: $\frac{1}{3}\le g(x)\le\frac{1}{2}$، ثم أعط حصرا للتكامل J.
2. أثبت أن $I-J=\int_0^{\ln 2}(e^x-1)dx$، ثم استنتج مساحة الحيز المحدد بـ (C_f) و (C_g) والمستقيمين اللذين معادلتيهما: $x=\ln 2$ و $x=0$.
3. أ) تحقق أنه من أجل $x\in D$: $f(x)=e^x-\frac{e^x}{e^x+1}$، ثم احسب التكامل I.
ب) استنتج قيمة التكامل J، ثم فسر النتيجة هندسيا.

<u>التمرين الرابع: 07 نقاط</u>

I. نعتبر الدالة g المعرفة على $]0;+\infty[$ بـ: $g(x)=x-1-\ln x$.

1. ادرس تغيرات الدالة g.
2. احسب $g(1)$ ثم استنتج حسب قيم x إشارة $g(x)$..

II. الدالة f معرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $f(x)=\ln x+\frac{2+\ln x}{x}$ و (C_f) تمثيلها البياني في المستوي المنسوب إلى المعلم المتعامد المتجانس $(O;\vec{i},\vec{j})$.

1. أ) أحسب $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$ و $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ >}} f(x)$.

ب) بين أنه من أجل $x\in]0;+\infty[$: $f'(x)=\frac{g(x)}{x^2}$، ثم شكل جدول تغيرات الدالة f.

ج) استنتج أن (C_f) يقبل نقطة انعطاف يطلب تعيين احداثيتيها.

2. ليكن (P) التمثيل البياني للدالة $x\mapsto\ln x$.
أ. احسب $\lim\limits_{x\to+\infty}[f(x)-\ln x]$، ثم فسر النتيجة هندسيا.
ب. ادرس الوضع النسبي لـ (C_f) و (P).
3. أ) بين أن (C_f) يقطع حامل محور الفواصل في نقطة وحيدة فاصلتها α بحيث $0{,}17<\alpha<0{,}19$، ثم استنتج حسب قيم x إشارة $f(x)$.
ب) ارسم (P) ثم ارسم (C_f).
4. ادرس تغيرات الدالة h المعرفة على المجال $]0;+\infty[$ بـ: $h(x)=[f(x)]^2$ دون تعيين عبارتها.

انتهـــــــــى الموضـــــوع الثاني